Всероссийская олимпиада школьников по математике

2018–2019 уч. г.

Школьный этап

9 класс

Задача 1. Есть три брата-акробата. Их средний рост — 1 метр 74 сантиметра. А средний рост двух из этих братьев: самого высокого и самого низкого — 1 метр 75 сантиметров. Какого роста средний брат? Ответ обоснуйте.

Задача 2. Карина достала из коробка несколько спичек и собрала из них сетку 5×1 из квадратиков со стороной в одну спичку.

Какое минимальное количество спичек ей нужно ещё достать из коробка, чтобы из всех спичек она смогла собрать сетку в форме квадрата? (Квадратики сетки опять должны иметь сторону в одну спичку. Лишних спичек остаться не должно.)

Задача 3. Назовём трёхзначное число *интересным,* если хотя бы одна его цифра делится на 3. Какое наибольшее количество подряд идущих интересных чисел может быть? (Приведите пример и докажите, что больше чисел получить нельзя.)

Задача 4. Разность корней квадратного уравнения с действительными коэффициентами 2018x2 +ax +b =0 — целое число (при этом сами корни необязательно целые). Докажите, что дискриминант этого уравнения делится на 20182.

Задача 5. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что

НОК(a,b)=НОД(a,b)+19

(и докажите, что других нет).

НОД(a,b) — это наибольший общий делитель, то есть наибольшее натуральное число, делящее и a, и b. НОК(a,b) — это наименьшее общее кратное, то есть наименьшее натуральное число, кратное и a, и b.

Задача 6. В стране 100 городов. Между любыми двумя городами либо нет соединения, либо налажено авиасообщение, либо есть железная дорога (одновременно и авиасообщения, и железной дороги быть не может). Известно, что если два города соединены с третьим железной дорогой, то между ними есть авиалиния, а если два города соединены с третьим авиалиниями, то между ними есть железная дорога. Из-за стихийного бедствия отменили все авиарейсы в стране. Правительство постановило в некоторых городах разместить центры гуманитарной помощи, причём так, чтобы из каждого города можно было добраться в подобный центр. Докажите, что необходимо открыть хотя бы 20 таких центров.

Письменная олимпиада.

За полное решение каждой задачи даётся 4 балла.