Всероссийская олимпиада школьников по математике

2018–2019 уч. г.

Школьный этап

9 класс

Решения

Задача 1. Есть три брата-акробата. Их средний рост — 1 метр 74 сантиметра. А средний рост двух из этих братьев: самого высокого и самого низкого — 1 метр 75 сантиметров. Какого роста средний брат? Ответ обоснуйте.

*Ответ:* 1 метр 72 сантиметра.

*Решение.* Поскольку средний рост всех трёх — 1 метр 74 сантиметра, суммарный рост всех составляет 5 метров 22 сантиметра. Средний рост двух братьев равен 1 метр 75 сантиметров, поэтому их суммарный рост составляет 3 метра 50 сантиметров. А значит, рост среднего брата составляет 1 метр 72 сантиметра.

## Критерии

2 б. Верный ход решения, но допущена арифметическая ошибка.

1. б. Приведён верный ответ и обоснование.

Задача 2. Карина достала из коробка несколько спичек и собрала из них сетку 5 × 1 из квадратиков со стороной в одну спичку.

Какое минимальное количество спичек ей нужно ещё достать из коробка, чтобы из всех спичек она смогла собрать сетку в форме квадрата? (Квадратики сетки опять должны иметь сторону в одну спичку. Лишних спичек остаться не должно.)

*Ответ:* 8.

*Решение.* В исходной прямоугольной сетке 16 спичек. В квадратной сетке 2×2 всего 12 спичек, а в сетке 3 × 3 — 24.

Следовательно, нам необходимо добавить 8 спичек.

## Критерии

1. б. Только верный ответ.
2. б. Указано, что нужно 8 спичек, чтобы получить квадрат 3 × 3.

4 б. Приведён верный ответ и полное обоснование.

В качестве обоснования засчитывается указание на количество спичек в квадратах 2 × 2 и 3 × 3.

Задача 3. Назовём трёхзначное число *интересным,* если хотя бы одна его цифра делится на 3. Какое наибольшее количество подряд идущих интересных чисел может быть? (Приведите пример и докажите, что больше чисел получить нельзя.)

*Ответ:* 122.

*Решение.* Числа 289,290,...,299,300,...,399,400,...,409,410 являются интересными (напомним, что 0 делится на 3), и их всего 122. Докажем, что большего количества быть не может.

Предположим, что нам удалось найти большее количество подряд идущих интересных чисел; выберем из них 123 подряд идущих.

Назовём сотню подряд идущих чисел, у которых разряд сотен одинаков и делится на 3, *интересной* сотней. Заметим, что до любой интересной сотни идут только 11 интересных чисел, оканчивающихся на 89,90,...,99, а 12-е число оканчивается на 88 и интересным не будет. Аналогично после интересной сотни идут тоже только 11 интересных чисел, оканчивающихся на 00,...,09,10, а 12-е число оканчивается на 11 и также не интересное.

Если наша последовательность из 123 чисел пересекается с некоторой интересной сотней, то она содержит хотя бы 12 чисел либо до, либо после этой сотни. Следовательно, хотя бы одно число в ней не интересное.

Если же наша последовательность из 123 чисел не пересекается с интересной сотней, то она содержит хотя бы одно число, оканчивающееся на 55 (как и на любую другую комбинацию цифр). Но это число не интересное, так как ни один разряд в нём на 3 не делится.

## Критерии

1. б. Неверный ответ и неверный (или отсутствующий) пример.
2. б. Приведён верный ответ.
3. б. Приведён верный пример, но в нем неправильно посчитано количество чисел.
4. б. Приведён верный пример и ответ, но нет обоснования, что большее количество чисел невозможно.
5. б. Приведён верный ответ, верный пример и обоснование.

Задача 4. Разность корней квадратного уравнения с действительными коэффициентами 2018*x2*+*ax* +*b* =0 — целое число (при этом сами корни необязательно целые). Докажите, что дискриминант этого уравнения делится на 20182.

*Решение.* Пусть *D* — дискриминант этого уравнения. Обозначим корни уравнения через x1 =(-a +(D)1/2) /4036 и X2 =(-a –(D)1/2) /4036. Тогда x1 –x2 =(D)1/2 /2018 =n – целое число.

Таким образом, (*D)1/2* =2018\**n* и *D* =20182\*n2, что делится на 20182.

## Критерии

1. б. Задача верна решена только для целых *a* и *b*.
2. б. Получено выражение для разности корней через дискриминант, но дальнейших продвижений нет.
3. б. Приведено верное доказательство.

Задача 5. Найдите все такие пары натуральных чисел *a* и *b*, что

НОК(*a,b*) =НОД(*a,b*) +19

(и докажите, что других нет).

НОД(*a,b*) — это наибольший общий делитель, то есть наибольшее натуральное число, делящее и *a*, и *b*. НОК(*a,b*) — это наименьшее общее кратное, то есть наименьшее натуральное число, кратное и *a*, и *b*.

*Ответ:* (*a,b*) =(4*,* 5)*,*(5*,* 4)*,*(19*,* 38)*,*(38*,* 19).

*Решение.* Пусть *d* =НОД(*a,b*). Заметим, что и НОК, и НОД делятся на *d*, а значит, и 19 делится на *d*. Поскольку 19 простое, получаем, что *d* =1 или *d* =19.

* + Если *d* =1, то числа *a* и *b* взаимно просты, и НОК(*a,b*) =*a*\**b* =1 +19 =20. Это означает, что *a* =4, *b* =5 или *a* =5, *b* =4.
	+ Если *d* =19, то НОД(*a,b*) =19 +19 =38. Это означает,что *a* =19, *b* =38 или *a* =38, *b* =19.

## Критерии

1. б. Приведён верный ответ.
2. б. Рассмотрен только один из случаев *d* = 1 или *d* = 19.
3. б. Приведён верный ответ и обоснование.

Задача 6. В стране 100 городов. Между любыми двумя городами либо нет соединения, либо налажено авиасообщение, либо есть железная дорога (одновременно и авиасообщения, и железной дороги быть не может). Известно, что если два города соединены с третьим железной дорогой, то между ними есть авиалиния, а если два города соединены с третьим авиалиниями, то между ними есть железная дорога. Из-за стихийного бедствия отменили все авиарейсы в стране. Правительство постановило в некоторых городах разместить центры гуманитарной помощи, причём так, чтобы из каждого города можно было добраться в подобный центр. Докажите, что необходимо открыть хотя бы 20 таких центров.

*Решение.* Заметим, что никакой город не соединён железной дорогой более чем с двумя другими городами. Действительно, пусть какие-то три города соединены железной дорогой с одним. Тогда все они между собой соединены авиалиниями, что невозможно по условию задачи. Значит, каждый город связан железной дорогой не более чем с двумя другими. Тогда связанные друг с другом железнодорожным сообщением города представляют собой цепочку (возможно, замкнутую). Докажем, что каждая такая цепочка содержит не более 5 вершин. Пусть города *A*,*B*,*C*,*D* и *E* стоят последовательно в цепочке. Поскольку *A* и *C* соединены с *B* железными дорогами, между *A* и *C* существует авиалиния. Аналогично между *C* и *E* существует авиалиния. Тогда между *A* и *E* существует железная дорога, и, значит, города соединены по кругу и больше ни с каким другим городом не связаны. Таким образом, в каждой цепочке не более 5 городов. Чтобы из каждого города можно было добраться до гуманитарного центра, его необходимо открыть в каждой такой цепочке. А значит, и центров необходимо построить хотя бы 100 /5 =20, что и требовалось доказать.

## Критерии

1 б. Доказано, что каждый город соединён железной дорогой не более чем с двумя другими, или эквивалентное утверждение для авиасообщенией.

1. б. Доказано, что в каждой цепочке железнодорожного сообщения не более 5 городов, или эквивалентное утверждение для авиасообщенией.

б. Приведено верное доказательство.