Всероссийская олимпиада школьников по математике

2018–2019 уч. г.

Школьный этап

11 класс

Решения

Задача 1. Докажите, что уравнение *x^2*+2^2018*x* +2^2019=0 не имеет целых корней.

*Первое решение.* Дискриминант этого уравнения равен

2^4036 −4\*2^2019 =2^2021(2^2015 −1)*.*

Для наличия целого корня необходимо, чтобы дискриминант был точным квадратом. Однако, число 2^2021(2^2015−1) не является точным квадратом, так как степень вхождения двойки в любой точный квадрат чётна.

*Второе решение.* Предположим противное: пусть у этого уравнения есть целый корень *n*. Заметим, что он должен быть отрицательным, так как иначе *n^2*+2^2018*n* +2^2019было бы положительным. Так как

*n*2 +22018*n* +22019 =0*,*

число 2^2019 делится на *n*, то есть *n* =−2^lдля некоторого неотрицательного целого l. Тогда 2^2018+*l* =2^2l+2^2019. Если 2l *<* 2019, то 2^2018−*l* =1 +2^2019−2l, что невозможно, так как 1 +2^2019−2*l* нечётно и больше одного. Аналогично, если 2l *>* 2019, то 2^l−1 =2^2l−2019 +1, что невозможно, так как 2^2l−2019 +1 нечётно и больше одного.

*Третье решение.* Заметим, что при *x* =−2 левая часть уравнения положительна (равна 4), а при *x* =−3 отрицательна (равна −2^2018 +9). Значит, на промежутке (−3;−2) у уравнения есть корень; он, очевидно, нецелый. Так как по теореме Виета сумма корней нашего уравнения равна −2^2018, второй корень тоже нецелый.

## Критерии

4 б. Верное решение.

1 б. Дискриминант записан в виде произведения степени двойки на нечетное число.

Задача 2. На школьном спектакле все 25 мест в первом ряду заняты школьниками. Известно, что

никакие две девочки в этом ряду не сидят рядом;

рядом с каждым мальчиком сидит ещё хотя бы один мальчик;

всего в первом ряду сидят 9 девочек.

Могло ли так оказаться, что на центральном месте в ряду сидит мальчик? (Ответ обоснуйте.)

*Ответ:* нет, не могло.

*Решение.* Поскольку никакие две девочки не сидят рядом, каждая девочка сидит между двумя мальчиками. Таким образом, весь ряд представляет собой «группы» подряд сидящих мальчиков, причём между соседними группами мальчиков сидит ровно одна девочка.

По условию рядом с каждым мальчиком сидит ещё один мальчик, поэтому в каждой группе находятся хотя бы 2 мальчика. А так как всего девочек 9, то групп мальчиков хотя бы 8. Получается, что всего детей хотя бы 9 +2\*8 =25. Но их ровно 25, значит, групп мальчиков ровно 8, и в каждой группе ровно 2 человека.

Тогда рассадка детей восстанавливается однозначно, и на тринадцатом месте сидит девочка.

## Критерии

0 б. Только верный ответ без обоснования.

2 б. Указана верная рассадка детей, но нет обоснования, что других рассадок не существует.

4 б. Приведён верный ответ и обоснование.

Задача 3. Назовём трёхзначное число *интересным,* если хотя бы одна его цифра делится на 3. Какое наибольшее количество подряд идущих интересных чисел может быть? (Приведите пример и докажите, что больше чисел получить нельзя.)

*Ответ:* 122.

*Решение.* Числа 289,290,...,299,300,...,399,400,...,409,410 являются интересными (напомним, что 0 делится на 3), и их всего 122. Докажем, что большего количества быть не может.

Предположим, что нам удалось найти большее количество подряд идущих интересных чисел; выберем из них 123 подряд идущих.

Назовём сотню подряд идущих чисел, у которых разряд сотен одинаков и делится на 3, *интересной* сотней. Заметим, что до любой интересной сотни идут только 11 интересных чисел, оканчивающихся на 89,90,...,99, а 12-е число оканчивается на 88 и интересным не будет. Аналогично после интересной сотни идут тоже только 11 интересных чисел, оканчивающихся на 00,...,09,10, а 12-е число оканчивается на 11 и также не интересное.

Если наша последовательность из 123 чисел пересекается с некоторой интересной сотней, то она содержит хотя бы 12 чисел либо до, либо после этой сотни. Следовательно, хотя бы одно число в ней не интересное.

Если же наша последовательность из 123 чисел не пересекается с интересной сотней, то она содержит хотя бы одно число, оканчивающееся на 55 (как и на любую другую комбинацию цифр). Но это число не интересное, так как ни один разряд в нём на 3 не делится.

## Критерии

1. б. Неверный ответ и неверный (или отсутствующий) пример.
2. б. Приведён верный ответ.
3. б. Приведён верный пример, но в нем неправильно посчитано количество чисел.
4. б. Приведён верный пример и ответ, но нет обоснования, что большее количество чисел невозможно.

4 б. Приведён верный ответ, верный пример и обоснование.

Задача 4. Выпуклый четырёхугольник *ABCD* таков, что |<*BAC* =|<*BDA* и |<*BAD* =|<*ADC* =60. Найдите длину *AD*, если известно, что *AB* =14, *CD* =6.

*Ответ:* 20.

*Решение.* Продлим *AB* и *CD* до пересечения в точке *P*. Поскольку ∠*PAD* = ∠*ADP* = 60◦, то треугольник *ADP* является равносторонним. Далее заметим, что треугольник *APC* равен треугольнику *DAB*, поскольку *AP* =*AB,|<APC* =60=|<*DAB* и |<*PAC* =|<*ADB.* Поэтому *PC* =*AB* =14, и *AD* =*PD* =*PC* +*CD* =14 +6 =20.

## Критерии

1. б. Только верный ответ без обоснования.
2. б. Присутствует дополнительное построение до равностороннего треугольника *APD*, но дальнейших продвижений нет.
3. б. Найдена пара равных треугольников, приводящих к решению задачи, но решение не доведено до конца.
4. б. Приведён верный ответ и обоснование.

Задача 5. На доске написано число ноль. Петру разрешается совершать следующие операции:

применить к одному из написанных на доске чисел тригонометрическую (sin, cos, tg или ctg) или обратную тригонометрическую (arcsin, arccos, arctg или arcctg) функцию и написать результат на доске;

написать на доске частное или произведение двух уже написанных чисел.

Помогите Петру написать на доске (3)1/2.

*Решение.* Пётр может, например, совершить следующие вычисления:

cos0 =1;

arctan1 =π/4;

arccos0 =π/2;

π/4 /π/2 =1/2;

arccos1/2 =π/3;

tgπ/3 =(3)1/2.

*Замечание.* К требуемому результату может приводить ещё много последовательностей операций.

## Критерии

1. б. Получено число π/2 или π/4.
2. б. Получены числа π/2 и π/4.
3. б. Получено число 1/2.
4. б. Получено число π/3 или π/6.
5. б. Верное решение.

Задача 6. Внутри шляпы волшебника живут 100 кроликов: белые, синие и зелёные. Известно, что если произвольным образом вытащить из шляпы 81 кролика, то среди них обязательно найдутся три разноцветных. Какое наименьшее количество кроликов нужно достать из шляпы, чтобы среди них точно было два разноцветных?

*Ответ:* 61.

*Решение.* Докажем, что если произвольным образом вытащить из шляпы 61 кролика, то среди них найдутся два разноцветных. Предположим противное: пусть имеется *a* > 61 кроликов какого-то цвета (например, белого). Пусть второй цвет по количеству кроликов — синий. Тогда в шляпе живёт хотя бы (100 –a) /2 синих кроликов. А значит, общее количество белых и синих хотя бы

a +(100 –a) /2 =(100 +a) /2 =161/2 = 80,5

Так как кроликов целое число, белых и синих вместе хотя бы 81, что противоречит условию.

Покажем, что 60 кроликов может быть недостаточно. Пусть в шляпе живёт 60 белых и по 20 синих и зеленых. Тогда может получиться, что все вытащенные кролики белые. С другой стороны, если вытащить 81 кролика, то среди них точно встретятся кролики всех трёх цветов.

## Критерии

4 б. Верное решение.

3 б. Доказано, что 61 кролика хватит.

1 б. Показано, что 60 кроликов может не хватить.

0 б. Только правильный ответ.