Всероссийская олимпиада школьников по математике

2018–2019 уч. г.

Школьный этап

10 класс

Решения

Задача 1. Есть три брата-акробата. Их средний рост — 1 метр 74 сантиметра. А средний рост двух из этих братьев: самого высокого и самого низкого — 1 метр 75 сантиметров. Какого роста средний брат? Ответ обоснуйте.

*Ответ:* 1 метр 72 сантиметра.

*Решение.* Поскольку средний рост всех трёх — 1 метр 74 сантиметра, суммарный рост всех составляет 5 метров 22 сантиметра. Средний рост двух братьев равен 1 метр 75 сантиметров, поэтому их суммарный рост составляет 3 метра 50 сантиметров. А значит, рост среднего брата составляет 1 метр 72 сантиметра.

## Критерии

2 б. Верный ход решения, но допущена арифметическая ошибка.

4 б. Приведён верный ответ и обоснование.

Задача 2. Карина достала из коробка несколько спичек и собрала из них сетку 3 × 7 из квадратиков со стороной в одну спичку.

Какое минимальное количество спичек ей нужно ещё достать из коробка, чтобы из всех спичек она смогла собрать сетку в форме квадрата? (Квадратики сетки опять должны иметь сторону в одну спичку. Лишних спичек остаться не должно.)

*Ответ:* 8.

*Решение.* В исходной прямоугольной сетке 52 спички. В квадратной сетке 4×4 всего 40 спичек, а в сетке 5 × 5 — 60.

Следовательно, нам необходимо добавить 8 спичек.

## Критерии

1. б. Только верный ответ.
2. б. Указано, что нужно 8 спичек, чтобы получить квадрат 5 × 5.

4 б. Приведён верный ответ и полное обоснование.

В качестве обоснования засчитывается указание на количество спичек в квадратах 4 × 4 и 5 × 5.

Задача 3. Назовём трёхзначное число *интересным,* если хотя бы одна его цифра делится на 3. Какое наибольшее количество подряд идущих интересных чисел может быть? (Приведите пример и докажите, что больше чисел получить нельзя.)

*Ответ:* 122.

*Решение.* Числа 289,290,...,299,300,...,399,400,...,409,410 являются интересными (напомним, что 0 делится на 3), и их всего 122. Докажем, что большего количества быть не может.

Предположим, что нам удалось найти большее количество подряд идущих интересных чисел; выберем из них 123 подряд идущих.

Назовём сотню подряд идущих чисел, у которых разряд сотен одинаков и делится на 3, *интересной* сотней. Заметим, что до любой интересной сотни идут только 11 интересных чисел, оканчивающихся на 89,90,...,99, а 12-е число оканчивается на 88 и интересным не будет. Аналогично после интересной сотни идут тоже только 11 интересных чисел, оканчивающихся на 00,...,09,10, а 12-е число оканчивается на 11 и также не интересное.

Если наша последовательность из 123 чисел пересекается с некоторой интересной сотней, то она содержит хотя бы 12 чисел либо до, либо после этой сотни. Следовательно, хотя бы одно число в ней не интересное.

Если же наша последовательность из 123 чисел не пересекается с интересной сотней, то она содержит хотя бы одно число, оканчивающееся на 55 (как и на любую другую комбинацию цифр). Но это число не интересное, так как ни один разряд в нём на 3 не делится.

## Критерии

1. б. Неверный ответ и неверный (или отсутствующий) пример.
2. б. Приведён верный ответ.
3. б. Приведён верный пример, но в нем неправильно посчитано количество чисел.
4. б. Приведён верный пример и ответ, но нет обоснования, что большее количество чисел невозможно.

4 б. Приведён верный ответ, верный пример и обоснование.

Задача 4. Числа от 1 до 50 написаны на карточках. Можно ли разложить эти карточки в 11 мешков (чтобы в каждый мешок попала хотя бы одна карточка) так, чтобы в каждом мешке произведение чисел на карточках делилось на 9?

*Ответ:* нет.

*Решение.* Предположим противное: пусть карточки можно разложить по одиннадцати мешкам так, чтобы выполнялось условие.

Для того чтобы произведение чисел на карточках в некотором мешке делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено одно из двух условий:

среди чисел на карточках в этом мешке есть хотя бы одно, кратное 9;

среди чисел на карточках в этом мешке есть хотя бы два, кратных 3.

Из чисел от 1 до 50 ровно пять кратны 9 (это числа 9,18,27,36,45). Значит, хотя бы шесть мешков не содержат чисел, кратных 9. Эти мешки должны содержать как минимум по два числа, кратных 3, но не кратных 9. Тогда всего чисел, кратных 3, но не кратных 9, должно быть не менее 12. Но в промежутке от 1 до 50 ровно 11 таких чисел (3,6,12,15,21,24,30,33,39,42,48). Противоречие.

## Критерии

1. б. Только ответ без доказательства.
2. б. В работе присутствует наблюдение, что среди чисел в мешке должно быть одно, кратное 9, или два, кратных 3, но дальнейших продвижений нет.

3 б. Идейно верное решение, неправильно построенное логически. Приведём эскиз такой потенциальной работы: «Чисел, кратных 9, ровно 5, их кладём в 5 мешков; остальных чисел, кратных 3, ровно 11, кладём их в 5 мешков по два, и ещё одно число осталось. Итого 10 мешков, а надо 11. Значит, нельзя». Правильно логически построенное решение должно приводить к противоречию любой потенциально возможный способ разложить числа; неправильно построенное решение опирается на конкретный способ раскладывать карточки по мешкам, который по каким-то причинам кажется автору оптимальным. 4 б. Любое полное верное решение.

Задача 5. Дано положительное число *a*. Известно, что уравнение *x^3*+1 =*ax* имеет ровно два положительных корня, и отношение большего из них к меньшему равно 2018. Уравнение *x^3*+1 =*ax^2*также имеет ровно два положительных корня. Докажите, что отношение большего из них к меньшему также равно 2018.

*Решение.* Обозначим положительные корни уравнения *x^3* +1 =*ax* через *x1*и *x2*

(0 *< x1**< x2*, *x2*/*x1*=2018). Подставим их в уравнение и поделим два получившихся равенства на x1^3 и на x2^3:

x1^3 +1 =ax1 равносильно 1 +(1 /x1)^3 =a (1 /x1)^2;

x2^3 +1 =ax2 равносильно 1 +(1 /x2)^3 =a(1 /x2)^2.

Из формул видно, что 1/x1 и 1/x2 — положительные корни уравнения *x^3* +1 =*ax^2*. По условию их ровно два, и надо найти отношение большего к меньшему. Ясно, что 1/x2 < 1/x1. Тогда 1/x1 /1/x2 =x2 /x1 =2018.

## Критерии

1. б. В работе отмечен тот факт, что при делении первого уравнения из условия на x^3и последующей замены 1/х на х первое уравнение переходит во второе, но никаких дальнейших продвижений нет.
2. б. В работе доказано, что второе уравнение имеет положительные корни 1/x\_1 и 1/х\_2, но отношение большего к меньшему найдено ошибочно (к примеру, перепутаны больший и меньший).
3. б. Любое полное верное решение.

Задача 6. Пятачок и Винни-Пух решили съесть квадратную шоколадку 7 × 7. Они поочерёдно по клеточкам выедают из неё кусочки: Пятачок — 1×1, ВинниПух — 2×1 или 1×2 (кусочки можно выедать не обязательно с краю). Первый ход делает Пятачок. Если перед ходом Винни-Пуха в шоколадке не осталось ни одного кусочка 2 × 1 или 1 × 2, то вся оставшаяся шоколадка достаётся Пятачку. Кто из друзей сможет съесть больше половины всей шоколадки вне зависимости от действий второго?

*Ответ:* Пятачок.

*Решение.* Раскрасим мысленно все клетки шоколадки в два цвета в шахматном порядке. Получится 24 чёрные клетки и 25 белых клеток.

Опишем явно одну из возможных стратегий Пятачка. На каждом ходу Пятачок будет выедать какую-нибудь чёрную клетку. Заметим, что Винни-Пух каждым своим ходом съедает ровно одну чёрную клетку (и ровно одну белую). Таким образом, после первых 12 пар ходов все чёрные клетки закончатся, Винни-Пух больше не сможет ходить и вся оставшаяся шоколадка достанется Пятачку. Всего за первые 12 своих ходов Винни-Пух съест не более 24 клеток, что меньше половины всей шоколадки, и больше он ничего не съест. Следовательно, Пятачок, придерживаясь приведённой стратегии, съест больше половины шоколадки.

## Критерии

0 б. Только правильный ответ.

1. б. Дана стратегия Пятачка, которая работает только против одной или нескольких возможных стратегий Винни-Пуха. Обычно в таких работах необоснованно полагают, что какие-то ходы Винни-Пуха «выгоднее» других, и рассматривают только «выгодные» ходы. Сюда же относятся работы с неполнотой перебора возможных действий Винни-Пуха.
2. б. В работе присутствует идея шахматной раскраски шоколадки, но дальнейших продвижений нет.
3. б. В работе описана правильная стратегия Пятачка, которая на самом деле работает против любых возможных действий Вини-Пуха, но обоснования нет вовсе или в обосновании рассматриваются только одна из нескольких возможных стратегий Винни-Пуха.

4 б. Любое полное верное решение. Типичное решение должно содержать описание стратегии Пятачка и обоснование, почему приведённая стратегия работает против любых возможных действий Винни-Пуха.