**8 класс**

8.1. Из 1812 одинаковых квадратов со стороной 1 мм сделали прямоугольную рамку для групповой фотографии. Толщина рамки = 1 мм. Границы фотографии совпадают с внутренними границами рамки). Потом фотографию разрезали по линии миллиметровой сетки на две прямоугольные части. Теперь понадобилось две рамки, на которые ушло 2018 таких же квадратов. Найдите размеры исходной фотографии.

* 1. Записаны четыре различных натуральных числа. Оказалось, что сумма чисел, им обратных, равна 1. Может ли среди записанных чисел отсутствовать число 2?

**8.3.** На координатной плоскости построены четыре прямые, уравнения которых имеют вид *y* =*kx* +*b*. Все коэффициенты и свободные члены – различные натуральные числа от 1 до 8. Могут ли эти 4 прямые разделить плоскость ровно на 8 частей?

**8.4.** На острове живут 33 рыцаря, а также лжецы и фантазёры. Каждого жителя этого острова по очереди спросили: “Сколько среди вас рыцарей?”. Было получено десять различных ответов, каждый из которых был назван более, чем одним жителем. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда называют неверное число, которое ещё не было названо, а фантазёры всегда называют число, которое на единицу больше предыдущего ответа. Обязательно ли было названо число 40?

8.5. В трапеции *ABCD* точка *M* – середина боковой стороны *CD*. Лучи *BD* и *BM* делят угол *ABC* на три равные части. Диагональ *AC* является биссектрисой угла *BAD*. Найдите углы трапеции.

**8 класс с ответами.**

8.1. Из 1812 одинаковых квадратов со стороной 1 мм сделали прямоугольную рамку для групповой фотографии. Толщина рамки = 1 мм. Границы фотографии совпадают с внутренними границами рамки). Потом фотографию разрезали по линии миллиметровой сетки на две прямоугольные части. Теперь понадобилось две рамки, на которые ушло 2018 таких же квадратов. Найдите размеры исходной фотографии.

**Решение**. Без ограничения общности можно считать, что разрез проходил по вертикали. После разрезания добавились две вертикальные стороны рамки вместе с угловыми квадратами, на которые ушло 2018 – 1812 = 206 квадратов. Значит, на каждую сторону ушло 206 : 2 = 103 квадрата и столько же квадратов составляла вертикальная сторона исходной рамки. Тогда горизонтальная сторона исходной рамки (без учета угловых квадратов) составляла (1812 – 206) : 2 = 803 квадратов. Так как угловые квадраты учитывать не надо, то размер исходной фотографии: 101×803 (мм).

**Ответ**: 101×803 (мм).

Критерии проверки.

“*+*” *Приведено полное обоснованное решение и получен верный ответ*

“*±*” *Приведены верные рассуждения, но в качестве ответа дан размер исходной рамки* *(103×805 мм)*

“*±*” *Приведены верные в целом рассуждения, но при получении ответа угловые квадраты* *вычтены лишний раз (101×801 мм)*

“-+” *Приведен только верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию*

“–” *Приведен только ответ*

1. “–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

8.2. Записаны четыре различных натуральных числа. Оказалось, что сумма чисел, им обратных, равна 1. Может ли среди записанных чисел отсутствовать число 2?

**Решение**. Если хотя бы одно из записанных чисел – это 1, то обратное к нему также 1, тогда сумма обратных чисел больше, чем 1. Следовательно, среди записанных чисел нет 1. Предположим, что среди нет числа 2. Рассмотрим четыре наименьших натуральных числа из оставшихся: 3, 4, 5 и 6. Сумма чисел, им обратных, равна 1/3 +1/4 +1/5 +1/6 =19/20 < 1. Увеличение любого из этих чисел приводит к уменьшению числа, ему обратного, поэтому при отсутствии числа 2 среди записанных сумма обратных чисел не будет равна 1.

*Условию задачи удовлетворяют следующие наборы чисел: (2; 3; 7; 42), (2; 3 8; 24), (2; 3; 9; 18), (2; 3; 10; 15), (2; 4; 5; 20), (2; 4; 6; 12). От школьников не требуется приводить пример чисел, удовлетворяющих условию.*

1. **Ответ**: не может.

Критерии проверки.

“*+*” *Приведено полное обоснованное решение*

“*±*” *Приведены верные в целом рассуждения, но случай, когда одно из чисел равно 1, не рассмотрен*

“-+” *Рассмотрен только случай 3, 4, 5 и 6 без дальнейших рассуждений и выводов*

“–” *Приведен только ответ*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

**8.3.** На координатной плоскости построены четыре прямые, уравнения которых имеют вид *y* =*kx* +*b*. Все коэффициенты и свободные члены – различные натуральные числа от 1 до 8. Могут ли эти 4 прямые разделить плоскость ровно на 8 частей?

**Решение**. Рассмотрим, например, прямые, заданные уравнениями: *y* =8*x* +1, *y* =7*x* +2, *y* =6*x* +3 и *y* =5*x* +4. Каждая из них проходит через точку (1;9), поэтому они делят плоскость ровно на 8 частей.

*Существуют и другие примеры, в которых все прямые проходят через указанную точку. Это условие выполняется, если в каждом из уравнений k +b =9. В других случаях плоскость разделится на большее количество частей (другой общей точки быть не может и параллельных прямых среди них нет).*

**Ответ**: могут.

Критерии проверки.

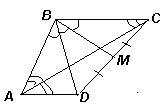
“*+*” *Приведен верный пример и объяснено, почему в этом случае плоскость разделится ровно на 8 частей*

“*±*” *Приведен только верный пример (без дальнейших пояснений)*

“-+” *Приведены 4 уравнения прямых, проходящих через одну точку, но использованы не все числа от 1 до 8, а какие-то из них повторяются*

“–” *Приведен только ответ*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*



**8.4.** На острове живут 33 рыцаря, а также лжецы и фантазёры. Каждого жителя этого острова по очереди спросили: “Сколько среди вас рыцарей?”. Было получено десять различных ответов, каждый из которых был назван более, чем одним жителем. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда называют неверное число, которое ещё не было названо, а фантазёры всегда называют число, которое на единицу больше предыдущего ответа. Обязательно ли было названо число 40?

**Решение**. Из условия задачи следует, что каждый рыцарь называл число 33. Числа, меньшие, чем 33, не могли быть названы. Действительно, рассмотрим наименьшее из таких чисел. Его не мог назвать фантазер, так как не было названо предыдущее число. А если бы его назвал кто-то из лжецов, то он был бы единственный давший такой ответ. Но каждый ответ был дан, как минимум, двумя жителями.

Докажем, что все названные числа должны быть последовательными, начиная с 33 (но не обязательно они назывались по порядку). Предположим, что некоторое число *m* > 34 назвали, а предыдущее число *m* -1 не называли, тогда фантазёры не могли назвать число *m*, значит, его назвал лжец. Но такой мог быть только один, а число *m* было названо, как минимум, два раза. Противоречие.

Таким образом, названные числа идут подряд, то есть названы все числа от 33 до 42, поэтому число 40 обязательно было названо.

*Описанная в условии ситуация возможна, например: 39л; 40ф; 33р; 34л; 36л; 35л; 36ф; 37ф; 38л; 41л; 42ф; 33р; 34ф; 35ф; 36ф; 37ф; 38ф; 39ф; 40ф; 41ф; 42ф; 33р; ...*

**Ответ**: обязательно.

Критерии проверки.

“*+*” *Приведено полное обоснованное решение*

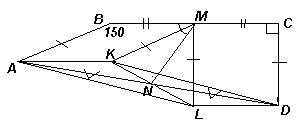
“*±*” *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

“-+” *Верно обосновано, что в ответах должны быть все числа от 33 до 42 (не обязательно названные в том же порядке), но не обосновано, что не названы числа, меньшие, чем 33*

“-+” *Обосновано только, что числа, меньшие, чем 33, не могли быть названы, но дальнейших продвижений нет или в дальнейших рассуждениях есть ошибки (например, утверждается, что числа обязательно назывались в порядке возрастания)*

“–” *Приведен только ответ*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*



8.5. В трапеции *ABCD* точка *M* – середина боковой стороны *CD*. Лучи *BD* и *BM* делят угол *ABC* на три равные части. Диагональ *AC* является биссектрисой угла *BAD*. Найдите углы трапеции.

1. **Решение**. Пусть |<*ABD* =*X*, тогда |<*AB*C =3*X*, |<*BAD* =180° – 3*X*, |<*BDA* =|<*DB*C =2*X (как накрест лежащие углы при основаниях трапеции)*. В треугольнике *BCD* отрезок *BM* является биссектрисой и медианой, следовательно, этот треугольник – равнобедренный: *BD* =*B*C. Тогда |<*BCD* =|<*BDC* =(180 –|<*DBC*) /2 =90 –X.
2. Кроме того, |<*BCA* =|<*DА*C =|<*BA*C, следовательно,*BA* =*BC*. Таким образом, треугольник *BAD* – также равнобедренный, поэтому |<*BA*D =|<*BDA*, значит, 180° -3X =2X, откуда X =36°. Следовательно, |<*A* =72°, |<*B* =108°, |<*C* =54°, |<*D* =126°.
3. **Ответ**: |<*A* =72,|<*B* =108,|<*C* =54,|<*D* =126.
4. Критерии проверки.
5. “*+*” *Приведено полное обоснованное решение*
6. “*±*” *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*
7. “-+” *Доказана только равнобедренность треугольников BCD или ABC*
8. “–” *Приведен только ответ*
9. “–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*