**11 класс.**

**11.1.** Графики функций Y =aX2, Y =bX и Y =c пересекаются в точке, расположенной выше оси абсцисс. Определите, сколько корней может иметь уравнение aX2 +bX +c.

**11.2.** Существует ли треугольник, у которого сумма косинусов внутренних углов равна 1?

**11.3.** В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* (*ABCDEF* – основание)боковоеребро равно *a*, плоский угол при вершине *S* равен 10. Муравей ползет по поверхности пирамиды из вершины *A*, стремится побывать на всех боковых ребрах (возможно в вершинах) и вернуться в точку *A*. Какова длина его кратчайшего пути?

**11.4.** В вершинах семнадцатиугольника записали различные целые числа (по одному в каждой вершине). Затем все числа одновременно заменили на новые: каждое заменили на разность двух следующих за ним по часовой стрелке чисел (из соседнего вычитали следующее за ним). Могло ли произведение полученных чисел оказаться нечетным?

**11.5.** В выпуклом пятиугольнике *PQRST* угол *PRT* в два раза меньше, чем угол *QRS*, а все стороны равны. Найдите угол *PRT*.

**11.6.** В стопку сложены 300 карточек: 100 белых, 100 чёрных и 100 красных. Для каждой белой карточки подсчитано количество чёрных, лежащих ниже её, для каждой чёрной – количество красных, лежащих ниже её, а для каждой красной – количество белых, лежащих ниже её. Найдите наибольшее возможное значение суммы трёхсот получившихся чисел.

11 класс с ответами.

**11.1.** Графики функций Y =aX2, Y =bX и Y =c пересекаются в точке, расположенной выше оси абсцисс. Определите, сколько корней может иметь уравнение aX2 +bX +c.

**Решение**. Из условия задачи следует, что графики пересекаются в точке (*m*;*c*), где *c* > 0. Тогда выполняются равенства bm =c и am2 =c, значит, m >< 0. Следовательно, дискриминант данного уравнения D =b2 -4ac =c2/m2 -4c2/m2 =-3c2/m2 < 0, то есть это уравнение не имеет корней.

**Ответ**: корней нет.

Критерии проверки.

“*+*” *Приведено полное обоснованное решение*

“*±*”*Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

“-+” *Приведен верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка в заключительной фазе решения*

“–” *Приведен только ответ*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

**11.2.** Существует ли треугольник, у которого сумма косинусов внутренних углов равна 1?

**Решение**. Первый способ. Предположим, что такой треугольник *ABC* существует, то есть cosA +cosB +cosC =1. Так как cosC =cos(180 –A –B) =-cos(A +B), то cosA +cosB =1 +cos(A +B), откуда 2cos((A +B)/2)\*cos((A –B)/2) =2cos2(A +B)/2).

Так как A +B ><π, то cos((A +B)/2) ><0, следовательно, cos((A –B)/2) =cos((A +B)/2). Функция Y =cosX убывает на отрезке [0; π] и 0 <=|(A -B)/2| < π, 0 < (A +B)/2 < π, значит, |(A –B)|/2 =(A +B)/2. Это равенство выполняется только, если *A* =0 или *B* =0, но это невозможно, поскольку это величины углов треугольника.

Таким образом, треугольника с заданным условием не существует.

Второй способ. Пусть *а*, *b* и *с* – стороны треугольника, удовлетворяющего условию. Тогда, выразив его углы по теореме косинусов, получим:

(a2 +b2 –c2)/2ab +(b2 +c2 –a2)/2bc +(c2 +a2 –b2)/2ca =1;

(a2 +b2 –c2)/2ab -1 +(b2 +c2 –a2)/2bc -1 +(c2 +a2 –b2)/2ca +1 =0;

(a2 +b2 –c2 -2ab)/2ab +(b2 +c2 –a2 -2bc)/2bc +(c2 +a2 –b2 +2ca)/2ca =0;

((a –b)2 –c2)/2ab +((b –c)2 –a2)/2bc +((c +a)2 –b2)/2ca =0;

((a –b –c)\*(a –b +c))/2ab +((b –c –a)\*(b –c +a))/2bc +((c +a –b)\*(c +a +b)/2ca =0;

(c(a –b –c)\*(a –b +c) –a(a –b +c)\*(a +b –c)+b(a –b +c)\*(a +b +c))/2abc =0;

((a –b +c)\*(ac +bc –c2 +a2 –ab +ac +ab +b2 +bc))/2abc =0;

((a –b +c)\*(b2 –c2 –a2 +2ac))/2abc =0;

((a –b +c)\*(b2 –(a –c)2))/2abc =0;

((a +c –b)\*(b +c –a)\*(a +b –c))/2abc =0 ,

что невозможно, так как из неравенства треугольника следует, что каждая скобка в числителе принимает положительное значение.

Таким образом, треугольника с заданным условием не существует.

Критерии проверки.

“*+*” *Приведено полное обоснованное решение*

“*±*” *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, при первом способе решения не объяснено, почему* )

“-+” *Верно выписано требуемое равенство для сторон или углов, но в процессе преобразований допущена вычислительная ошибка, не повлиявшая на ответ*

“–” *Приведен только ответ*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

**11.3.** В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* (*ABCDEF* – основание)боковоеребро равно *a*, плоский угол при вершине *S* равен 60. Муравей ползет по поверхности пирамиды из вершины *A*, стремится побывать на всех боковых ребрах (возможно в вершинах) и вернуться в точку *A*. Какова длина его кратчайшего пути?

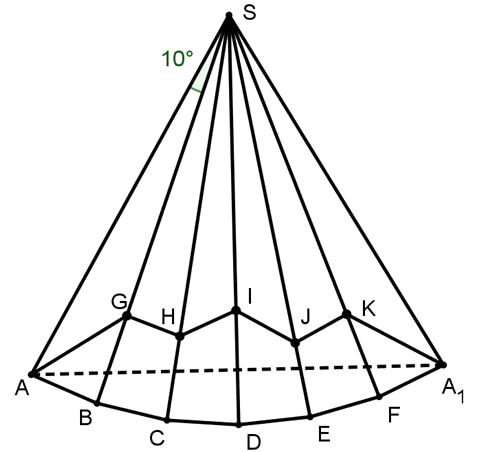


Рис. 11.3

**Решение**. “Разрежем” пирамиду *SABCDEF* по ребру *SA* и сделаем развертку.

Тогда любой маршрут по боковой поверхности пирамиды, удовлетворяющий условию, будет на развертке являться ломаной, соединяющей точки плоскости *А* и *А*1. Кратчайший путь из *А* в *А*1 равен длине отрезка *АА*1.

Заметим, что в равнобедренном треугольнике *ASA*1  угол при вершине *S* равен 60°. Следовательно, этот треугольник равносторонний, тогда *AA*1 =*a*.

*Отметим, что траекторию движения муравья по самой пирамиде указывать не требуется.*

**Ответ**: *a.*

Критерии проверки.

“*+*” *Приведено полное обоснованное решение*

“*±*” *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

“–” *Приведен только ответ*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

**11.4.** В вершинах семнадцатиугольника записали различные целые числа (по одному в каждой вершине). Затем все числа одновременно заменили на новые: каждое заменили на разность двух следующих за ним по часовой стрелке чисел (из соседнего вычитали следующее за ним).. Могло ли произведение полученных чисел оказаться нечетным?

**Решение**. Пусть первоначально в вершинах семнадцатиугольника записаны числа: *а*1,*а*2,...,*а*17 (нумерация – по часовой стрелке). Тогда после указанной замены в вершинах будут записаны числа: *а*2 –*а*3, *а*3 –*а*4, ..., *а*16 –*а*17, *а*17 –*а*1, *а*1 –*а*2.

Заметим, что сумма полученных семнадцати чисел равна 0. Следовательно, хотя бы одно из этих чисел – четное. Значит, их произведение также четное.

**Ответ**: не могло.

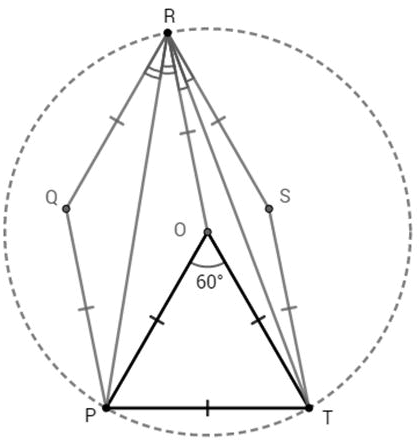
Критерии проверки.

“*+*” *Приведено полное обоснованное решение*

“-+” *Присутствует только верная идея сложения новых чисел, не доведенная до конца*

“–” *Приведен только ответ*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*



**11.5.** В выпуклом пятиугольнике *PQRST* угол *PRT* в два раза меньше, чем угол *QRS*, а все стороны равны. Найдите угол *PRT*.

**Решение**. Из условия задачи следует, что |<*PRQ* +|<*TRS* =|<*PRT* (\*).

Первый способ. Используем метод “свертывания”. Симметрично отразим треугольник *PQR* относительно прямой *PR*, а треугольник *ТSR* – относительно прямой *TR.* Из равенства (\*) и равенства *RQ* =*RS* следует, что образами точек *Q* и *S* является одна и та же точка *O*.

Заметим, что треугольник *TOP* – равносторонний. Кроме того, *OR* = *OP* =*OT*. Следовательно, *O* – центр описанной окружности треугольника *PRT*. Тогда |<*PRT* =0,5|<*POT* =30°.

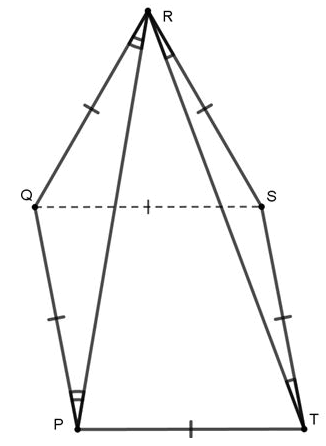


Рис. 11.5б

Второй способ. Докажем, что *QPTS* – параллелограмм. Действительно, используя равенство углов при основаниях в равнобедренных треугольниках *PQR* и *RST* и равенство (\*), получим: |<*QPT* +|<*PTS* =|<*QPR* +|<*RPT* +|<*RTP* +|<*STR* =|<*PRQ* +|<*TRS* +(180 –|<*PRT*) =180.

Таким образом, *PQ* || *ST* и *PQ* =*ST* (по условию), то есть *QPTS* – параллелограмм.. Тогда *QS* =*PT*, значит, треугольник *QRS* – равносторонний. Следовательно, |<*PRT* =0,5|<*QRS* =30.

Критерии проверки.

“*+*” *Приведено полное обоснованное решение*

“*±*” *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, использовано, но не обосновано, что образы точек Q и S при симметриях совпадают)*

“-+” *Верный ответ получен, исходя из того, что QPTS – параллелограмм, но это не доказано*

“–” *Приведен только ответ или ответ, полученный рассмотрением правильного пятиугольника*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

**11.6.** В стопку сложены 300 карточек: 100 белых, 100 чёрных и 100 красных. Для каждой белой карточки подсчитано количество чёрных, лежащих ниже её, для каждой чёрной – количество красных, лежащих ниже её, а для каждой красной – количество белых, лежащих ниже её. Найдите наибольшее возможное значение суммы трёхсот получившихся чисел.

**Решение**. Первый способ. Количество различных перестановок карточек конечно. Поэтому их расположение с наибольшей указанной суммой существует (возможно, не единственное).

Пусть карточки лежат так, что эта сумма максимальна. Без ограничения общности можно считать, что верхняя карточка – белая. Тогда в этой расстановке не могут лежать сверху вниз подряд пары карточек ЧБ, КЧ и БК, иначе можно увеличить сумму, поменяв их в таких парах местами. Значит, карточки должны лежать так (сверху вниз): ББ...БЧЧ...ЧКК...КББ...Б...

Длина каждой следующей серии карточек одного цвета не может быть меньше длины предыдущей серии. Действительно, если, например, в расположении с наибольшей суммой встретится фрагмент ...БББЧЧК..., то можно переставить карточку К наверх: ...КБББЧЧ..., увеличив сумму. Так как количество карточек каждого цвета одно и то же, то длины всех серий должны быть одинаковыми (в противном случае карточек того цвета, которые оказались в самом низу, будет больше, чем карточек другого цвета). Тогда серии одного цвета можно переставить “по циклу”, не изменив суммы, то есть получить такое расположение карточек: сверху 100 белых, под ними – 100 чёрных, а внизу – 100 красных. Значит, искомая сумма равна 100⋅100 + 100⋅100 = 20 000.

Второй способ. Пусть количество карточек каждого из трёх цветов равно *n*. Используя метод математической индукции, докажем, что для указанной суммы *S* выполняется неравенство *S* >< 2*n*2.

База индукции. При *n* =1 перебором убеждаемся, что *S* >=2. Шаг индукции: Пусть неравенство верно для *n* карточек каждого цвета. Докажем, что оно верно, если количество карточек каждого цвета равно *n* +1. Рассмотрим, как может увеличиться сумма *S*, если добавить по одной карточке каждого цвета.. Без ограничения общности можно считать, что белая карточка добавлена на самый верх стопки, а добавленные чёрная и красная карточки – самые верхние среди карточек своего цвета. Пусть выше первой красной карточки расположено *b* ранее лежащих чёрных, а выше первой чёрной – *w* ранее лежащих белых. Тогда белая карточка добавляет в сумму *n* +1 (учитывая все чёрные, лежащие под ней), чёрная карточка добавляет *n* +1 (учитывая все красные, лежащие под ней) и *w*, за счёт того, что она лежит под *w* старыми белыми карточками, а красная карточка добавляет не более, чем *n* –*w* за счёт белых, лежащих под ней, и *b* за счёт того, что она лежит под *b* старыми чёрными карточками. Итого, *S* <=2*n*2 +*n* +1 +*n* +1 +*w* +*n* –*w* +*b* =2*n*2 +3*n* +*b* +2. Учитывая, что *b* >< *n*, получим: *S* <=2*n*2 + 4*n* + 2 =2(*n* +1)2.

Таким образом, утверждение доказано для всех натуральных *n*. При *n* = 100 получим, что *S* <=2\*1002 =20000. Это значение достигается, например, при таком расположении: сверху 100 белых карточек, под ними – 100 чёрных, а внизу – 100 красных.

**Ответ**: 20000.

Критерии проверки.

“*+*” *Приведено полное обоснованное решение*

“*±*” *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

“-+” *В решении есть верные идеи, каким образом максимизировать сумму путем перестановки карточек, но решение не доведено до конца или содержит ошибки*

“–” *Приведен только ответ или ответ, полученный рассмотрением только частных случаев*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*