**10 класс**

**10.1.** 33 богатыря выходят в дозор 33 дня. В первый день должен выйти один богатырь, во второй – два, в третий – три, и так далее, в последний день – все богатыри. Сможет ли дядька Черномор организовать дозоры так, чтобы все богатыри вышли в дозор одинаковое количество раз?

**10.2.** Существуют ли такие попарно различные числа *a*, *b* и *c*, что число *a* является корнем квадратного трехчлена *x*2 –2*bx* +*c*2, число *b* является корнем квадратного трехчлена *x*2 –2*cx* +*a*2, а число *c* является корнем квадратного трехчлена *x*2 –2*ax* +*b*2?

**10.3.** Две окружности пересекаются в точках *A* и *B.* Оказалось, что радиусы *OA* и *OB* первой окружности являются касательными ко второй окружности. Через точку *A* проведена прямая, которая вторично пересекает окружности в точках *M* и *N*. Докажите, что *MB* перпендикулярна *NB*.

**10.4.** Выписаны все делители некоторого натурального числа, кроме единицы и его самого. Какие-то два числа из этого списка отличаются в шесть раз. А во сколько раз отличаются два самых больших числа из этого списка?

**10.5.** На сторонах *АВ* и *ВС* треугольника *АВС* отмечены точки *X* и *Y* соответственно. Отрезки *CX* и *AY* пересекаются в точке *T*. Докажите, что площадь треугольника *XBY* больше площади треугольника *XTY*.

**10.6.** Есть две коробки, в одной 2017 конфет, а в другой 2018. Играют двое, ходят по очереди. За один ход каждый может съесть любое количество конфет, отличное от нуля, из любой коробки. Правила игры не допускают, чтобы после какого-то хода число конфет в одной из коробок делилось на число конфет в другой. Проигрывает тот, кто не может сделать ход, не нарушив этого условия. Кто сможет выиграть: начинающий игру или второй игрок, как бы ни играл его соперник?

10 класс с ответами.

**10.1.** 33 богатыря выходят в дозор 33 дня. В первый день должен выйти один богатырь, во второй – два, в третий – три, и так далее, в последний день – все богатыри. Сможет ли дядька Черномор организовать дозоры так, чтобы все богатыри вышли в дозор одинаковое количество раз?

**Решение**. Так как 1 + 2 + ... + 33 =17\*33, то каждый богатырь должен выйти в дозор 17 раз. Пусть, например, Черномор пронумерует богатырей и в первые 16 дней богатыри выходят в дозор в соответствии со своими номерами: в первый день –богатырь с номером один, во второй – с номерами 1 и 2, и так далее, в шестнадцатый день –богатыри с номерами от 1 до 16. В следующие 16 дней порядок выхода такой: в семнадцатый день – богатыри с номерами от 17 до 33, в восемнадцатый – с номерами от 16 до 33, и так далее, в тридцать второй день : богатыри с номерами от 2 до 33. Таким образом, за эти дни каждый богатырь побывает в дозоре 16 раз, а в последний день выйдут все.

*Это решение можно изложить в общем виде, например, так. Например, пусть в k-ый день, где 1 <=k <=16, выходят богатыри с номерами от 1 до k, а все богатыри, которые не вышли в k-ый день, выходят в день, имеющий номер 33* – *k. Тогда за каждую пару дней вида (k; 33* – *k) в дозоре побывают все богатыри, и каждый выйдет 16 раз – по количеству таких пар. После этого они все вместе выйдут в последний день.*

**Ответ**: сможет.

Критерии проверки.

“*+*” *Приведено полное обоснованное решение*

“*±*” *Приведен верный алгоритм, но рассуждения не полны или содержат неточности*

“–” *Приведен только ответ*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

**10.2.** Существуют ли такие попарно различные числа *a*, *b* и *c*, что число *a* является корнем квадратного трехчлена *x*2 –2*bx* +*c*2, число *b* является корнем квадратного трехчлена *x*2 –2*cx* +*a*2, а число *c* является корнем квадратного трехчлена *x*2 –2*ax* +*b*2?

**Решение**. Предположим, что такие числа нашлись. Тогда выполняются равенства:

*a*2 –2*ba* +*c*2 =0, *b*2 –2*cb* +*a*2 =0 и *c*2 –2*ac* +*b*2 =0.

Складывая эти равенства почленно и группируя, получим:

(*a* –*b*)2 +(*b* –*c*)2 +(*c* –*a*)2 =0. Это возможно только в случае, когда *a* =*b* =*c*, что противоречит условию.

**Ответ**: не существуют.

Критерии проверки.

“*+*” *Приведено полное обоснованное решение*

“*±*”*Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

“-+” *Присутствует только верная идея сложения равенств, не доведенная до конца*

“–” *Приведен только ответ*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

**10.3.** Две окружности пересекаются в точках *А* и *В.* Оказалось, что радиусы *OA* и *OB* первой окружности являются касательными ко второй окружности. Через точку *A* проведена прямая, которая вторично пересекает окружности в точках *M* и *N*. Докажите, что *MB перпендикулярна NB*.

**Решение**. Пусть |<*BMN* =a, *|<BNM =b*.

Первый способ. Заметим, что |<*OAB* =|<*OBA* (по теореме об угле между касательной и хордой), |<*AOB* =2*a* (центральный угол). Из треугольника *AOB*: 2*a* +2b =180, значит *a* +b =90. Следовательно, |<*MBN* =90, что и требовалось.

Второй способ. Пусть *Q* – центр второй окружности, тогда |<*OQB* =a, *|<AQB* =b, |<*QOB* = |<AOB =. Следовательно, треугольники *QBO* и *MBN* подобны. Но |<*QBO* =90, (перпендикулярность касательной и радиуса), значит, |<*MBN* =90, что и требовалось.

Критерии проверки.

“*+*” *Приведено полное обоснованное решение*

“*±*” *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

**10.4.** Выписаны все делители некоторого натурального числа, кроме единицы и его самого. Какие-то два числа из этого списка отличаются в шесть раз. А во сколько раз отличаются два самых больших числа из этого списка?

**Решение**. Пусть среди делителей числа *N* есть числа *A* и 6*A*, тогда *N* делится на 6*A*. Следовательно *N* делится на 2 и на 3, то есть 2 и 3 – два наименьших числа в списке. Тогда два наибольших числа в списке – это N/2 и N/3. Их отношение: 3/2 =1,5.

**Ответ**: в полтора раза.

Критерии проверки.

“*+*” *Приведено полное обоснованное решение*

“*±*” *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

“-+” *Верный ответ получен, исходя из того, что 2 и 3 – наименьшие числа в списке, но это не доказано*

“-+” *Верный ответ получен, исходя из рассмотрения конкретных примеров*

“–” *Приведен только ответ*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

**10.5.** На сторонах *AB* и *BC* треугольника *ABC* отмечены точки *X* и *Y* соответственно. Отрезки *CX* и *AY* пересекаются в точке *T*. Докажите, что площадь треугольника *XBY* больше площади треугольника *XTY*.

**Решение**. Первый способ. Отметим на отрезке *BX* точку *X*1 так, что *YX*1 || *CX.* Аналогично, на отрезке *BY* выберем точку *Y*1 так, что *XY*1 || *AY*. Пусть отрезки *YX*1 и *XY*1 пересекаются в точке S. Тогда *XSYT* – параллелограмм, поэтому равны треугольники *XSY* и *XTY*, значит равны и их площади. Но площадь треугольника *XBY* больше площади треугольника *XSY*, значит, *SXBY* > *SXTY*.

*Отметив указанным образом точку X1, можно рассуждать иначе: из подобия треугольников XAT и X1AY следует, что YX1 > TX. Тогда SXTY < SXYX1 < SXBY.*

Второй способ. Обозначим площади треугольников буквами *a*, *b*, *c*, *d*, *e* так, что a =sBXY, b =sTXY, c =sATX, d =sCTY, e =sACT.

Так как площади треугольников с общей высотой относятся как их основания, то b/d =XT/CT =c/e. Тогда e =c\*d/b. Аналогично, a/b +d =BY/CY =a +b +c /d +e. Отсюда *a*(*d* + *e*) = (*a* + *b* + *c*)(*b* + *d*).

Выразим *а* из этого равенства, учитывая найденное выражение для *e*:

 a=(b +c)\*(b +d) /e –b =(b +c)\*(b +d) /(cd/b) -b =b\*(b +c)\*(b +d) /cd –b2. Тогда требуемое неравенство *a* > *b* следует из того, что получившееся дробное выражение больше 1. Последнее неравенство выполняется, так как числитель дроби больше *cd*, а знаменатель меньше, чем *cd.*

Критерии проверки.

“*+*” *Приведено полное обоснованное решение*

“*±*” *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

**10.6.** Есть две коробки, в одной 2017 конфет, а в другой 2018. Играют двое, ходят по очереди. За один ход каждый может съесть любое количество конфет, отличное от нуля, из любой коробки. Правила игры не допускают, чтобы после какого-то хода число конфет в одной из коробок делилось на число конфет в другой. Проигрывает тот, кто не может сделать ход, не нарушив этого условия. Кто сможет выиграть: начинающий игру или второй игрок, как бы ни играл его соперник?

**Решение**. Для того, чтобы выиграть, первый игрок после каждого своего хода должен создавать ситуацию, когда в одной из коробок 2*n* конфет, а в другой 2*n* +1 (*n* – натуральное число). В такой ситуации он заведомо не проигрывает.

Сначала он съедает две конфеты из второй коробки и получает нужную ситуацию. В дальнейшем, в ответ на любой ход второго игрока первый будет восстанавливать такое распределение конфет. Покажем, что он сможет это делать. Возможны 4 случая.

1) Второй ест четное количество конфет из той коробки, где их 2*n*. Тогда в ней останется 2*m* конфет (*m* > 0, иначе второй проиграл). В ответ первый съедает из другой коробки такое же количество конфет, и в ней остается 2*m* +1.

2) Второй ест нечетное количество конфет из той коробки, где их 2*n*. Тогда в ней останется 2*m* +1 конфет (*m* > 0, иначе второй проиграл). В ответ первый съедает из другой коробки на две конфеты больше и в ней остается 2*m*.

3) Второй ест нечетное количество конфет из той коробки, где их 2*n* +1. Тогда в ней останется 2*m* конфет, где 0 < *m* < *n* (иначе второй проиграл). В ответ первый съедает из другой коробки на две конфеты меньше и в ней остается 2*m* +1.

4) Второй ест четное количество конфет из той коробки, где их 2*n* +1. Тогда в ней останется 2*m* +1 конфет (*m* > 0, иначе второй проиграл). В ответ первый съедает из другой коробки такое же количество конфет, и в ней остается 2*m*.

Действуя таким образом, первый (если второй до этого ни разу не ошибётся) сведет игру к тому, что в одной коробке останется две конфеты, а в другой три, и после этого второй проигрывает, какой бы ход он не сделал.

**Ответ**: сможет выиграть первый.

Критерии проверки.

“*+*” *Приведено полное обоснованное решение*

“*±*” *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

“-+” *Приведена верная стратегия, но она не обоснована*

“–” *Приведен только ответ или ответ, полученный рассмотрением конкретных примеров*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*